



PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL VERHULST DALAM MENENTUKAN PROYEKSI PENDUDUK DI KABUPATEN TRENGGALEK

Dewi Anggreini¹, Ratri Candra Hastari²

Program Studi Pendidikan Matematika STKIP PGRI Tulungagung^{1,2}
anggreini_004@yahoo.com¹, ratricandrahastari@gmail.com²

Abstrak

Tujuan Penelitian ini adalah untuk menentukan proyeksi pertumbuhan penduduk di Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan model persamaan diferensial Verhulst berdasarkan laju pertumbuhan dan daya tampung (carrying capacity). Proyeksi kependudukan sejak lama merupakan masalah penting di dunia. Pertumbuhan Penduduk yang terus meningkat menyebabkan permasalahan dalam ekonomi dan sosial sehingga diperlukan solusi salah satunya dengan model verhuslt karena dalam model ini memperhitungkan faktor logistik dan ruang hidup. Adapun metode riset yang dilakukan pada tahap pertama yaitu menentukan terlebih dahulu subjek penelitian, tahap kedua dibagi menjadi dua bagian (1) pengumpulan data penelitian (2) melakukan analisis data kemudian mengambil kesimpulan. Penelitian ini menggunakan data sekunder yaitu jumlah penduduk Kabupaten Trenggalek periode tahun 2010-2016 yang diambil dari BPS Trenggalek. Hasil dari penelitian ini antara lain: 1) Nilai carrying capacity sebagai nilai yang membatasi laju pertumbuhan penduduk di Kabupaten Trenggalek sebesar 709.165,53. 2) Laju pertumbuhan instrinsik dengan model pertumbuhan logistik di Kabupaten Trenggalek yaitu sebesar $r = 0,10514$. 3) Hasil estimasi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025 menggunakan model pertumbuhan logistik adalah sebesar 701.957 jiwa. 4) Penggunaan model logistik dalam memproyeksikan jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek lebih mendekati pada model Logistik I dengan persamaannya $N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi semua pihak khususnya pada bidang matematika terapan serta metode dalam menghitung pertumbuhan populasi disuatu daerah pada periode yang akan datang.

Abstract

The purpose of this research is to determine the projection of population growth in Trenggalek Regency of East Java Province using Verhulst differential equation model based on growth rate and carrying capacity. Population projection has long been an important issue in the world. Growing Population is increasing causing problems of economic and social so that needed solution one of them with model of verhuslt because in this model takes into account the logistics factor and living space. The research method is done in the first stage that is first determining the subject of research, the second stage are divided into two parts (1) data collection research (2) perform data analysis then take conclusions. This research uses secondary data that is population of Regency of Trenggalek period year 2010-2016 taken from BPS Trenggalek. The results of this study include: 1) Value carrying capacity as a value that limits the rate of population growth in Trenggalek regency of 709,165.53. 2) Intrinsic growth rates with logistic growth model in Trenggalek Regency that is equal to $= 0,10514$. 3) Estimation of population in Trenggalek Regency in 2025 using logistic growth model is 701,957 people. 4) The use of logistic model in projecting the population in Trenggalek Regency is closer to Logistic I model with its equation $N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$. This research is expected to be useful for all parties,

PENDAHULUAN

Jumlah populasi dan pertumbuhan setiap negara akan berdampak pada kondisi ekonomi, kebijakan, budaya, pendidikan dan biaya sumber daya alam. Proyeksi penduduk bukan merupakan ramalan jumlah penduduk tetapi suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada asumsi dari komponen-komponen laju pertumbuhan penduduk, yaitu kelahiran, kematian, dan perpindahan. Ketiga komponen inilah yang menentukan besarnya jumlah penduduk dan struktur umur penduduk dimasa yang akan datang. Untuk menentukan masing-masing asumsi diperlukan data yang menggambarkan pola di masa lampau hingga saat ini, faktor-faktor yang mempengaruhi komponen-komponen itu, dan hubungan antara satu komponen dengan yang lain serta target yang diharapkan tercapai pada masa yang akan datang.

Trenggalek merupakan Kabupaten yang dikelilingi oleh pegunungan 2/3 wilayahnya) serta memiliki pantai pasir putih dan hutan mangrove yang sangat indah. Kota yang masih banyak dijumpai pemandangan alam pegunungan dan sawah yang masih terbentang luas. Dengan jumlah penduduk sebanyak 797.275 jiwa (data BPS tahun 2016) dan kepadatan penduduk sejumlah 632 jiwa/km². Luas wilayah Kabupaten Trenggalek sebesar 1.261,40 Km². Dari beberapa informasi di atas alasan peneliti memilih Kabupaten Trenggalek tersebut adalah: pertama, dikarenakan belum adanya penelitian sebelumnya yang membahas tentang pertumbuhan dan proyeksi penduduk di Kabupaten Trenggalek dengan menggunakan persamaan logistik. Alasan kedua yaitu, Kabupaten Trenggalek memiliki daerah yang luas akan tetapi jumlah penduduknya sedikit, hal ini sangat kontradiktif dengan tingginya angka pernikahan dibawah umur dimana banyak penduduk yang menikah setelah lulus SMP maupun SMA. Dari hal tersebut sangat menarik peneliti untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

Asumsi dari model pertumbuhan populasi klasik adalah laju pertumbuhan populasi terhadap waktu berbanding lurus dengan jumlah populasi yang ada. Dalam bidang biologi, pertumbuhan populasi merupakan salah satu contoh penerapan persamaan diferensial. Pada ilmu ekologi pertumbuhan populasi sering disebut sebagai, "dinamika populasi". Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan yang dibatasi oleh suatu faktor penghambat. Tujuan penelitian ini yaitu menghitung *carrying capacity*, laju pertumbuhan penduduk, jumlah penduduk kemudian dicari proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur untuk waktu yang akan datang menggunakan program Excel dan MAPLE. Berdasarkan penjelasan di atas, maka dari itu dipilih judul penelitian, "Penerapan Persamaan Diferensial *Verhulst* dalam Menentukan Proyeksi Penduduk di Kabupaten Trenggalek".

Dari pemaparan di atas peneliti mengambil rumusan masalah sebagai berikut: (1) Bagaimana menentukan besarnya nilai *carrying capacity* yang membatasi penduduk di Kabupaten Trenggalek? (2) Bagaimana menentukan laju pertumbuhan penduduk dengan menggunakan model pertumbuhan logistik? (3) Bagaimana menghitung jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025 dari hasil estimasi menggunakan model pertumbuhan logistik? (4) Bagaimana menentukan proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek menggunakan model pertumbuhan logistik?. Dari rumusan masalah tersebut dapat dijadikan dasar tujuan penelitian diantaranya (1) menentukan laju pertumbuhan penduduk dengan menggunakan model pertumbuhan logistik. (2) Menentukan jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025 dari hasil

estimasi menggunakan model pertumbuhan logistik. (3) Menentukan proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek menggunakan model pertumbuhan logistik.

METODE PENELITIAN

Tahapan Penelitian

Pada penelitian ini Metode riset yang digunakan antara lain: Tahap pertama adalah menentukan subjek penelitian, adapun subjek penelitiannya adalah jumlah penduduk mulai tahun 2010 sampai tahun 2016 di Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur dan Tahap Kedua adalah (1) mengumpulkan data penelitian, adapun pengumpulan data penelitian didapatkan dari data sekunder di Badan Pusat Statistik Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur (2) analisis data dan terakhir menarik kesimpulan.

Lokasi Penelitian

Lokasi pada penelitian ini adalah Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur.

Peubah yang diamati

Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah laju pertumbuhan intrinsik dan jumlah populasi penduduk pada waktu t . Laju pertumbuhan intrinsik atau *intrinsic growth rate* adalah nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi. Dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan intrinsik adalah kemampuan tumbuh populasi yang disebabkan oleh daya dukung lingkungan sehingga merupakan fungsi terhadap waktu. Dalam hal ini diasumsikan laju pertumbuhan intrinsik bernilai positif ($r > 0$), yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Model pertumbuhan dapat diturunkan dengan menggunakan asumsi: (a) laju pertumbuhan populasi $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ pada saat $N = 0$ adalah r (b) laju pertumbuhan ini menurun secara linear dan bernilai 0 saat $N = K$.

Model yang digunakan

Model pertumbuhan logistik (*logistic growth model*) menggunakan kaidah logistik (*logistic law*) bahwa persediaan logistik ada batasnya. Model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*). Dari asumsi tersebut dapat diturunkan suatu model pertumbuhan populasi yang disebut sebagai model pertumbuhan logistik. Dari asumsi tersebut diturunkan sebuah model pertumbuhan populasi yang disebut sebagai model pertumbuhan logistik, yaitu: $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r - \frac{r}{K} N$ atau

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Metode penelitian kualitatif adalah metode penelitian yang berlandaskan pada filsafat postpositivisme, digunakan untuk meneliti pada kondisi objek yang alamiah, dimana peneliti sebagai instrument kunci, teknik pengumpulan data dilakukan secara triangulasi (gabungan), analisis data bersifat induktif/kualitatif, dan hasil penelitian kualitatif lebih menekankan makna daripada generalisasi. Penelitian kualitatif adalah penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian. Jenis penelitian

ini termasuk penelitian Deskriptif. Sedangkan bentuk rancangan penelitian ini adalah studi kasus.

Rancangan studi kasus merupakan salah satu jenis pendekatan kualitatif yang menelaah sebuah “kasus” tertentu dalam konteks atau setting kehidupan nyata kontemporer. Kasus kasus dibatasi oleh waktu dan aktivitas, dan peneliti mengumpulkan informasi secara lengkap dengan menggunakan berbagai prosedur pengumpulan data berdasarkan waktu yang telah ditentukan. Perlakuan yang akan diberikan terhadap data yaitu penerapan persamaan differensial *Verhulst*/logistik berdasarkan *carrying capacity* menggunakan Aplikasi Microsoft Excel dan MAPLE.

Teknik Pengumpulan Data

Penelitian ini hanya menggunakan satu jenis data, yaitu data sekunder. Data sekunder didapatkan dari data jumlah penduduk Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Trenggalek mulai tahun 2010 sampai tahun 2016. Adapun kenapa dipilih mulai dari tahun 2010, dikarenakan sesuai dengan laporan data BPS Pusat Jakarta bahwa mulai tahun 2010 jumlah penduduk Indonesia masuk dalam jumlah penduduk terbesar ke 4 di dunia. Adapun untuk tahun 2016 dikarenakan data sekunder tersebut merupakan data yang paling baru disajikan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) di Kabupaten Trenggalek.

Teknik Analisis Data

Tehnik yang digunakan dalam menganalisis bentuk dan model penelitian ini adalah sebagai berikut: (a) Mengkonstruksi model persamaan diferensial *verhulst*/logistik. (b) Mencari solusi dari persamaan diferensial $\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. (c)

Menentukan waktu yang diukur dan jumlah populasi awal serta populasi pada tahun selanjutnya dimisalkan saat $t=0$ yaitu N_0 , saat $t=1$ yaitu N_1 dan saat $t=2$ yaitu N_2 . (d) Menentukan kapasitas tampung (*carrying capacity*). (e) Mencari laju pertumbuhan penduduk yaitu *ratau intrinsic growth rate* menggunakan solusi model persamaan logistik. (f) Menghitung jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek dengan solusi persamaan logistik. (g) Menentukan proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek menggunakan model pertumbuhan logistik yang nilainya cukup mendekati hasil sensus. (h) Menentukan proyeksi penduduk di Kabupaten Trenggalek dengan aplikasi Microsoft Excel dan MAPLE.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Pertumbuhan Eksponensial

Beberapa asumsi yang digunakan dalam pendugaan pertumbuhan penduduk secara eksponensial, yaitu: Laju kelahiran dan kematian konstan, Tidak ada struktur genetik, Tidak ada struktur perbedaan umur dan ukuran, Tidak ada waktu tunda. Pada model ini diasumsikan bahwa populasi bertambah dengan laju pertumbuhan populasi yang sebanding dengan besarnya populasi. Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t (waktu), dan k menyatakan laju pertumbuhan populasi maka model populasi eksponensial dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \text{ atau } \frac{dN_t}{N_t dt} = rN(t) \quad (1)$$

Dimana:

N_t = Kerapatan populasi atau banyaknya populasi pada waktu t jam

N_0 = Kerapatan populasi atau banyaknya populasi mula – mula

r = Laju pertumbuhan populasi

t = Waktu ke t (jam)

Persamaan logistik disusun berdasarkan asumsi-asumsi antara lain: (1) Populasi akan mencapai keseimbangan dengan lingkungan sehingga memiliki sebaran umur stabil (*stable age distribution*). (2) Populasi memiliki laju pertumbuhan yang secara berangsur-angsur menurun secara tetap dengan konstanta r . (3) Pengaruh r terhadap peningkatan kerapatan karena bertumbuhnya populasi merupakan respon yang *instantaneous* atau seketika itu juga dan tidak terdapat penundaan atau senjang waktu (*time lag*) sepanjang waktu pertumbuhan keadaan lingkungan tidak berubah. (4) Pengaruh kerapatan adalah sama terhadap semua tingkat umur populasi. (5) Peluang untuk berkembang biak tidak dipengaruhi oleh kerapatan.

Dengan perjalanan waktu, N tumbuh semakin besar sehingga persaingan antar individu dalam populasi (ruang, makanan, dan sebagainya) semakin meningkat pula dan pertumbuhan populasi semakin terhambat. Hal ini mengakibatkan $\frac{dN}{dt}$ semakin menurun dan berhenti tumbuh ($r = 0$) pada saat daya dukung dicapai. Untuk mengakomodasi faktor berkurangnya daya dukung akibat pertumbuhan, model *Malthus* $\frac{dN}{dt} = rN(t)$ perlu dimodifikasi. Modifikasi model Malthus dilakukan karena Model Malthus yang naik terus itu jelas tidak sesuai bila diambil cukup besar. Bila N menjadi besar tempatnya terbatas maka timbul hambatan karena padatnya populasi yang akan mengurangi populasinya. Diasumsikan bahwa $f(N)$ adalah fungsi linear dimana a merupakan faktor penurunan proporsional.

$$f(N) = r - aN, r, a > 0, N > 0,$$
$$\frac{dN}{Ndt} = r - aN,$$

Persamaan ini disebut sebagai model logistik atau model *Verhulst-pearl*. Model persamaan diferensial $\frac{dN}{dt} = rN(t)$ merupakan persamaan diferensial separabel, sehingga kita dapat mencari solusi umumnya sebagai berikut:

$$N(t) = e^{r \cdot t + c} \quad (2)$$

jika diberikan kondisi awal $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ maka diperoleh nilai $c = \ln N_0$ sehingga bila nilai c disubstitusikan ke dalam (2) akan menghasilkan,

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan bentuk solusi khusus dari model pertumbuhan eksponensial. Dari persamaan tersebut dapat dilihat jika nilai r positif maka populasi akan meningkat secara eksponensial, sebaliknya jika nilai r negatif maka populasi akan semakin punah.

Model Pertumbuhan Logistik

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, yaitu Pierre Francois Verhulst pada tahun 1838, hal ini diakibatkan karena model pertumbuhan alami tidak cukup tepat untuk populasi yang cukup besar dan tempatnya terbatas sehingga timbul hambatan karenanya padatnya populasi yang akan mengurangi populasi itu sendiri. Perubahan jumlah populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian dan migrasi. Salah satu model pertumbuhan adalah model pertumbuhan kontinu khususnya model logistik. Model ini merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial yang pertama kali dicetuskan oleh Maltus. [6]. Model pertumbuhan populasi logistik ini merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial di atas. Model logistik digunakan karena pada kenyataan di alam bahwa besar kecilnya populasi bergantung

pada kerapatannya, sehingga laju kelahiran dan laju kematian tidak konstan [6]. Bentuk yang paling sederhana untuk laju pertumbuhan relatif yang mengakomodasi asumsi ini adalah:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = k \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (4)$$

Kedua ruas dikalikan dengan N , maka diperoleh model untuk pertumbuhan populasi yang dikenal **persamaan diferensial logistik** :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (5)$$

Perhatikan dari persamaan (5) bahwa jika N kecil dibandingkan dengan K , maka N/K mendekati 0 dan $dN/dt \approx rN$. Namun, jika $N \rightarrow K$ (populasi mendekati kapasitas tampungnya), maka $N/K \rightarrow 1$, sehingga $\frac{dN}{dt} \rightarrow 0$. Jika populasi N berada diantara 0 dan K , maka ruas kanan persamaan di atas bernilai positif, sehingga $\frac{dN}{dt} \rightarrow 1$ dan populasi naik. Tetapi jika populasi melampaui kapasitas tampungnya ($N > K$), maka $1 - \frac{N}{K}$ negatif, sehingga $\frac{dN}{dt} < 0$ dan populasi turun. Solusi persamaan logistik dapat diperoleh:

$$N = \frac{K e^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}} \quad (6)$$

Dari persamaan (6) jika kita memberikan nilai awal $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ kemudian disubstitusikan ke dalam (6) maka akan diperoleh nilai $c = \ln (N_0 / K - N_0)$ selanjutnya nilai c tersebut disubstitusikan kembali ke dalam persamaan (6), sehingga diperoleh solusi khusus dari model logistik seperti berikut,

$$N = \frac{K}{e^{-rt} \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) + 1} \quad (7)$$

persamaan (7) merupakan bentuk sederhana dari solusi khusus model logistik yang akan digunakan dalam melakukan proyeksi penduduk di Kabupaten Trenggalek dan Trenggalek. Menurut Lukman dan Kwardiniya penentuan nilai K atau nilai *carrying capacity* diperoleh dari nilai limit dari $N(t)$ yaitu:

$$N(t) \max = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} = \frac{N_1 (2N_0 N_2 - N_2 N_1 - N_0 N_1)}{N_0 N_2 - N_1^2}$$

Formulasi Model

Pada tahun 1798, Thomas Malthus membuat sebuah model pertumbuhan penduduk dasar dengan $N(t)$ menunjukkan populasi suatu spesies pada waktu dan dimisalkan $r = a$ merupakan laju pertumbuhan penduduk. Dari persamaan (1) diperoleh model: $\frac{dN(t)}{dt} = aN(t)$ persamaan ini adalah linear orde persamaan diferensial non-homogen yang dikenal sebagai hukum *Malthus* pertumbuhan penduduk. Dari persamaan (3) solusi dari persamaan di atas adalah $N(t) = N_0 e^{at}$.

Laju pertumbuhan penduduk yang terus meningkat dapat diperkecil dengan adanya faktor penghambat. Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan yang dibatasi oleh suatu faktor penghambat. Diturunkan model persamaan sebagai berikut: $\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{M} \right)$ Jika $M = a/b$, maka diperoleh:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad (8)$$

Dengan cara memisahkan variabel dan mengintegrasikan persamaan (8) diperoleh

$$\frac{1}{a} \left(\ln N(t) - \ln(a - bN(t)) \right) = t + C \quad (9)$$

Jika diberikan syarat $t = 0$ maka $N(0) = N_0$ Oleh karena itu persamaan (9) menjadi:

$$\frac{1}{a} \left(\ln N(t) - \ln(a - bN(t)) \right) = t + \frac{1}{a} \left(\ln N_0 - \ln(a - bN_0) \right) \quad (10)$$

Didapatkan nilai $N(t)$ sebagai berikut

$$N(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{bN_0} - 1 \right) e^{-at}} \quad (11)$$

Misalkan pada saat $t = 1$ dari persamaan (11) diperoleh

$$N_1 = \frac{b}{a} (1 - e^{-a}) = \frac{1}{N_1} - \frac{e^{-a}}{N_0} \quad (12)$$

Dari persamaan (12) diperoleh:

$$(1 + e^{-a}) = \frac{\frac{1}{N_1} - \frac{e^{-2a}}{N_0}}{\frac{1}{N_1} - \frac{e^{-a}}{N_0}}, \quad (13)$$

Sehingga

$$e^{-a} = \frac{N_0(N_1 - N_2)}{N_2(N_0 - N_1)}, \quad (14)$$

Persamaan (14) disubstitusikan ke dalam persamaan (12) sehingga didapatkan

$$\frac{b}{a} = \frac{N_0 N_2 - N_1^2}{N_1 (2N_0 N_2 - N_2 N_1 - N_0 N_1)}, \quad (15)$$

Dengan demikian nilai K atau *carrying capacity* diperoleh dari nilai limit dari $N(t)$ adalah

$$N(t)_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} = \frac{N_1 (2N_0 N_2 - N_2 N_1 - N_0 N_1)}{N_0 N_2 - N_1^2} \quad (16)$$

Data Jumlah Penduduk di Kabupaten Trenggalek

Dalam penelitian ini, data jumlah penduduk yang digunakan adalah data jumlah penduduk hasil sensus penduduk di Kabupaten Trenggalek dari tahun 2010 sampai tahun 2016 yang bersumber dari Badan Pusat Statistik (BPS) di Kabupaten Trenggalek. Berikut ini adalah tabel 1 yang menyatakan jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek dari tahun 2010-2016:

Tabel 1. Data Jumlah Penduduk di Kabupaten Trenggalek

Tahun	Jumlah Penduduk
2010	675 584
2011	678 792
2012	681 706
2013	683 791
2014	686 781
2015	689 200
2016	691 295

Penyelesaian Model Logistik Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Trenggalek

Untuk menentukan model logistik dari data jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tabel 1 di atas, sebelumnya diasumsikan terlebih dahulu bahwa waktu (t) yang diukur dalam tahun dan dimisalkan $t = 0$ pada tahun 2010 maka syarat awal adalah $N(0) = 675.584$. Selanjutnya adalah menentukan nilai carrying capacity atau kapasitas tampung yaitu $K =$

$$N(t)_{Max} = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} = \frac{N_1(2N_0N_2 - N_2N_1 - N_0N_1)}{N_0N_2 - N_1^2}$$

Dari tabel 1 diperoleh $t = 0, 1, 2$ tahun 2010, 2011, 2012 dengan nilai N_0, N_1, N_2 masing-masing adalah

$$N_0 = 675.584, N_1 = 678.792, N_2 = 681.706$$

Nilai N_0, N_1, N_2 disubstitusikan ke persamaan untuk mencari nilai *Carrying Capacity* sehingga diperoleh nilai yang membatasi penduduk di Kabupaten Trenggalek Provinsi Jawa Timur yaitu $N(t) = \frac{a}{b}$, Selanjutnya perhitungannya adalah sbb:

$$\begin{aligned} N(t)_{max} &= \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} = \frac{N_1(2N_0N_2 - N_2N_1 - N_0N_1)}{N_0N_2 - N_1^2} \\ &= \frac{678.792 (2 \times 675.584 \times 681.706 - 681.706 \times 678.792 - 675.584 \times 678.792)}{675.584 \times 681.706 - (678.792)^2} \end{aligned}$$

$$K = 709.165,53$$

Nilai K dan N_0 didistribusikan ke solusi model logistik (16) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} N &= \frac{K}{e^{-rt} \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) + 1}, \\ N &= \frac{709.165,53}{e^{-rt} \left(\frac{709.165,53}{675.584} - 1 \right) + 1}, \\ N &= \frac{709.165,53}{e^{-rt} (0,049707) + 1}, \end{aligned} \quad (17)$$

Selanjutnya dari persamaan (17) akan dicari model logistik yang dapat mewakili laju pertumbuhan penduduk di Kabupaten Trenggalek untuk $t = 1$ pada tahun 2011 maka $N(1) = 678.792$, jika didistribusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} 678.792 &= \frac{709.165,53}{e^{-r} (0,049707) + 1}, \\ e^{-r} (0,04971) &= \frac{709.165,53 - 678.792}{678.792}, \\ -r &= \ln(0,90020), \\ r &= 0,10514, \end{aligned}$$

Nilai r yang diperoleh didistribusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}, \quad (\text{Model I})$$

Untuk $t = 2$ pada tahun 2012 maka $N(2) = 681.706$, jika disubstitusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} 681.706 &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-2r} + 1}, \\ (0,04971)e^{-2r} &= \frac{709.165,53 - 681.706}{681.706} \\ -2r &= \ln(0,81035) \\ r &= 0,10514 \end{aligned}$$

Jika nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1} \quad (\text{Model II})$$

Untuk $t = 3$ pada tahun 2013 maka $N(3) = 683.791$, jika disubstitusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} 683.791 &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-3r} + 1}, \\ (0,04971)e^{-3r} &= \frac{709.165,53 - 683.791}{683.791} \\ -3r &= \ln(0,74654) \\ r &= 0,09744 \end{aligned}$$

Jika nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)t} + 1} \quad (\text{Model III})$$

Untuk $t = 4$ pada tahun 2014 maka $N(4) = 686.781$, jika disubstitusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} 686.781 &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-4r} + 1}, \\ (0,04971)e^{-4r} &= \frac{709.165,53 - 686.781}{686.781} \\ -4r &= \ln(0,65571) \\ r &= 0,10551 \end{aligned}$$

Jika nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)t} + 1} \quad (\text{Model IV})$$

untuk $t = 5$ pada tahun 2015 maka $N(5) = 689.200$, jika disubstitusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$689.200 = \frac{709.165,53}{(0,09754)e^{-5r} + 1} ,$$

$$(0,04971)e^{-5r} = \frac{709.165,53 - 689.200}{689.200}$$

$$-5r = \ln(0,58279)$$

$$r = 0,10798$$

Jika nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10798)t} + 1} \quad (\text{Model V})$$

untuk $t = 6$ pada tahun 2016 maka $N(6) = 691.295$, jika disubstitusikan ke persamaan (17) diperoleh

$$691.295 = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-6r} + 1} ,$$

$$(0,04971)e^{-6r} = \frac{709.165,53 - 691.295}{691.295}$$

$$-6r = \ln(0,52006)$$

$$r = 0,10897$$

Jika nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (17) maka menghasilkan

$$N = \frac{709.165,53}{(0,09754)e^{-(0,10897)t} + 1} \quad (\text{Model VI})$$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh hasil model logistik sebagai berikut:

1. Model Logistik I, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 10,51%
2. Model Logistik II, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 10,51%
3. Model Logistik III, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 9,74%
4. Model Logistik IV, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 10,55%
5. Model Logistik V, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 10,79%.
6. Model Logistik VI, laju pertumbuhan relatifnya per tahun sekitar 10,89%.

Selanjutnya akan dihitung jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek dari tahun 2010-2016 yang dihasilkan dari keenam model di atas,

1. Model Logistik I bentuk persamaannya $N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$
 Untuk $t = 0$ maka $N(0) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)0} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582$
 Untuk $t = 1$ maka $N(1) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)1} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04475} = 678.790$
 Untuk $t = 2$ maka $N(2) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)2} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04028} = 681.706$
 Untuk $t = 3$ maka $N(3) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)3} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03626} = 684.351$
 Untuk $t = 4$ maka $N(4) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)4} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03264} = 686.750$
 Untuk $t = 5$ maka $N(5) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)5} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02939} = 688.918$

$$\text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)6} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02645} = 690.891$$

$$2. \text{ Model Logistik II bentuk persamaannya } N(t) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$$

$$\text{Untuk } t = 0 \text{ maka } N(0) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)0} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582$$

$$\text{Untuk } t = 1 \text{ maka } N(1) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)1} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04475} = 678.790$$

$$\text{Untuk } t = 2 \text{ maka } N(2) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)2} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04028} = 681.706$$

$$\text{Untuk } t = 3 \text{ maka } N(3) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)3} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03626} = 684.351$$

$$\text{Untuk } t = 4 \text{ maka } N(4) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)4} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03264} = 686.750$$

$$\text{Untuk } t = 5 \text{ maka } N(5) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)5} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02939} = 688.918$$

$$\text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)6} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02645} = 690.891$$

$$3. \text{ Model Logistik III bentuk persamaannya } N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)t} + 1}$$

$$\text{Untuk } t = 0 \text{ maka } N(0) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)0} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582$$

$$\text{Untuk } t = 1 \text{ maka } N(1) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)1} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04509} = 678.569$$

$$\text{Untuk } t = 2 \text{ maka } N(2) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)2} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04091} = 681.294$$

$$\text{Untuk } t = 3 \text{ maka } N(3) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)3} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03711} = 683.790$$

$$\text{Untuk } t = 4 \text{ maka } N(4) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)4} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03367} = 686.066$$

$$\text{Untuk } t = 5 \text{ maka } N(5) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)5} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03054} = 688.149$$

$$\text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,09744)6} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02770} = 690.051$$

$$4. \text{ Model Logistik IV bentuk persamaannya } N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)t} + 1}$$

$$\text{Untuk } t = 0 \text{ maka } N(0) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)0} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582$$

$$\text{Untuk } t = 1 \text{ maka } N(1) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)1} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04473} = 678.801$$

$$\text{Untuk } t = 2 \text{ maka } N(2) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)2} + 1} = \frac{709.165,53}{1,04025} = 681.726$$

$$\text{Untuk } t = 3 \text{ maka } N(3) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)3} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03662} = 684.113$$

$$\text{Untuk } t = 4 \text{ maka } N(4) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)4} + 1} = \frac{709.165,53}{1,03260} = 686.777$$

$$\text{Untuk } t = 5 \text{ maka } N(5) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)5} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02933} = 688.958$$

$$\text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10551)6} + 1} = \frac{709.165,53}{1,02639} = 690.932$$

$$5. \text{ Model Logistik V bentuk persamaannya } N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)t} + 1}$$

$$\begin{aligned}\text{Untuk } t = 0 \text{ maka } N(0) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)0+1}} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582 \\ \text{Untuk } t = 1 \text{ maka } N(1) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)1+1}} = \frac{709.165,53}{1,04462} = 678.874 \\ \text{Untuk } t = 2 \text{ maka } N(2) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)2+1}} = \frac{709.165,53}{1,04005} = 681.857 \\ \text{Untuk } t = 3 \text{ maka } N(3) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)3+1}} = \frac{709.165,53}{1,03595} = 684.556 \\ \text{Untuk } t = 4 \text{ maka } N(4) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)4+1}} = \frac{709.165,53}{1,03227} = 686.996 \\ \text{Untuk } t = 5 \text{ maka } N(5) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)5+1}} = \frac{709.165,53}{1,02897} = 689.199 \\ \text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,107985)6+1}} = \frac{709.165,53}{1,02601} = 691.188\end{aligned}$$

6. Model Logistik VI bentuk persamaannya $N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)t+1}}$

$$\begin{aligned}\text{Untuk } t = 0 \text{ maka } N(0) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)0+1}} = \frac{709.165,53}{1,04971} = 675.582 \\ \text{Untuk } t = 1 \text{ maka } N(1) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)1+1}} = \frac{709.165,53}{1,04458} = 678.900 \\ \text{Untuk } t = 2 \text{ maka } N(2) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)2+1}} = \frac{709.165,53}{1,03998} = 681.903 \\ \text{Untuk } t = 3 \text{ maka } N(3) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)3+1}} = \frac{709.165,53}{1,03585} = 684.622 \\ \text{Untuk } t = 4 \text{ maka } N(4) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)4+1}} = \frac{709.165,53}{1,03215} = 687.076 \\ \text{Untuk } t = 5 \text{ maka } N(5) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)5+1}} = \frac{709.165,53}{1,02883} = 689.293 \\ \text{Untuk } t = 6 \text{ maka } N(6) &= \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,108969)6+1}} = \frac{709.165,53}{1,02585} = 691.296\end{aligned}$$

Kemudian akan dianalisis model yang memberikan hasil yang cukup signifikan bila dibandingkan dengan hasil sensus penduduk. Berikut ini dalam tabel 2 memuat hasil jumlah penduduk berdasarkan lima model logistik di atas dari tahun 2010-2016.

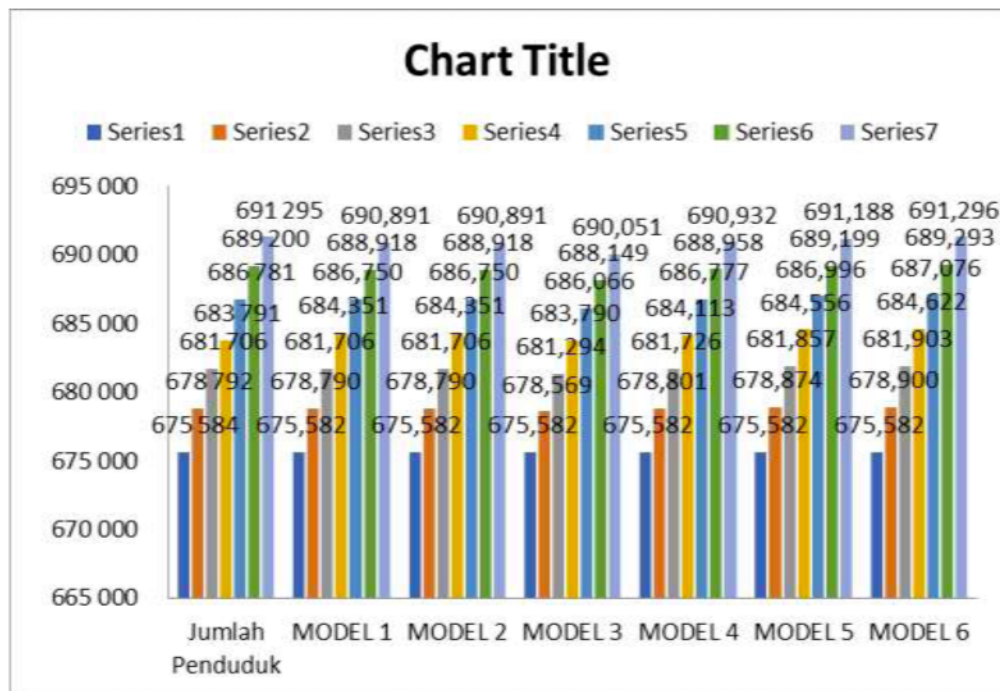
Tabel 2. Perbandingan Jumlah Penduduk di Kabupaten Trenggalek antara Hasil Sensus dan Hasil Model

Tahun	Hasil Sensus	MODEL 1	MODEL 2	MODEL 3	MODEL 4	MODEL 5	MODEL 6
2010	675 584	675.582	675.582	675.582	675.582	675.582	675.582
2011	678 792	678.790	678.790	678.569	678.801	678.874	678.900
2012	681 706	681.706	681.706	681.294	681.726	681.857	681.903
2013	683 791	684.351	684.351	683.790	684.113	684.556	684.622
2014	686 781	686.750	686.750	686.066	686.777	686.996	687.076
2015	689 200	688.918	688.918	688.149	688.958	689.199	689.293
2016	691 295	690.891	690.891	690.051	690.932	691.188	691.296

Hasil yang diperoleh kemudian akan dibandingkan dengan data jumlah penduduk dari hasil sensus Kabupaten Trenggalek. Dari tabel 2 dapat dilihat bahwa model I yang memiliki nilai paling mendekati dengan nilai sensus yang sebenarnya. Sehingga model I yang akan digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di

Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025.

Jika perbandingan jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek antara hasil sensus dan hasil model pada tabel 2 ditampilkan dalam bentuk diagram batang, maka akan terlihat seperti di bawah ini.



Grafik 1. Jumlah Penduduk di Kabupaten Trenggalek Berdasarkan Hasil Sensus dan Hasil Model

Berdasarkan jumlah penduduk yang dihasilkan oleh keenam model di atas, model logistik I memberikan hasil yang cukup mendekati hasil sensus dibandingkan model logistik II, III, IV, V dan VI. Selain itu keakuratan model logistik I cukup baik, hal ini dapat dilihat dari hasil jumlah penduduk di Kabupaten Tulungagung pada tahun 2010-2016 yang dihasilkan model logistik I hampir sama dengan hasil sensus penduduk 2010-2016. Dengan demikian dipilih model logistik I sebagai model final yang akan digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada sensus penduduk 2025.

Prediksi Jumlah Penduduk di Kabupaten Trenggalek Tahun 2025

Karena model logistik I digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025, maka persamaan modelnya adalah :

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$$

Dari model di atas laju pertumbuhan relatif penduduk di Kabupaten Trenggalek adalah 10,51% per tahun. Selanjutnya untuk memprediksi jumlah penduduk pada tahun 2025 diambil $t = 15$ disubstitusikan ke dalam model logistik 1 di atas akan diperoleh:

$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)t} + 1}$$

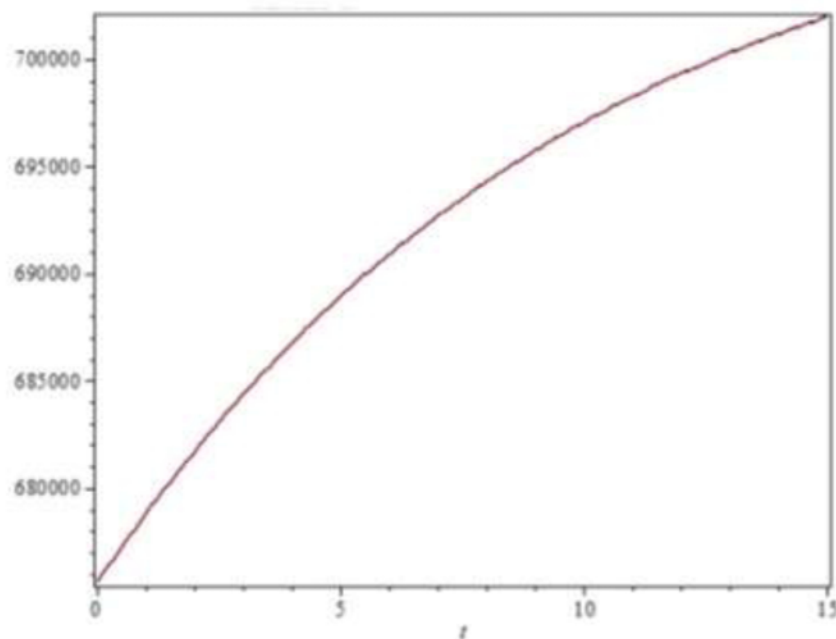
$$N = \frac{709.165,53}{(0,04971)e^{-(0,10514)15} + 1}$$

$$N = \frac{709.165,53}{1,01027} = 701.957$$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025 yang dihasilkan model logistik adalah **701.957** jiwa.

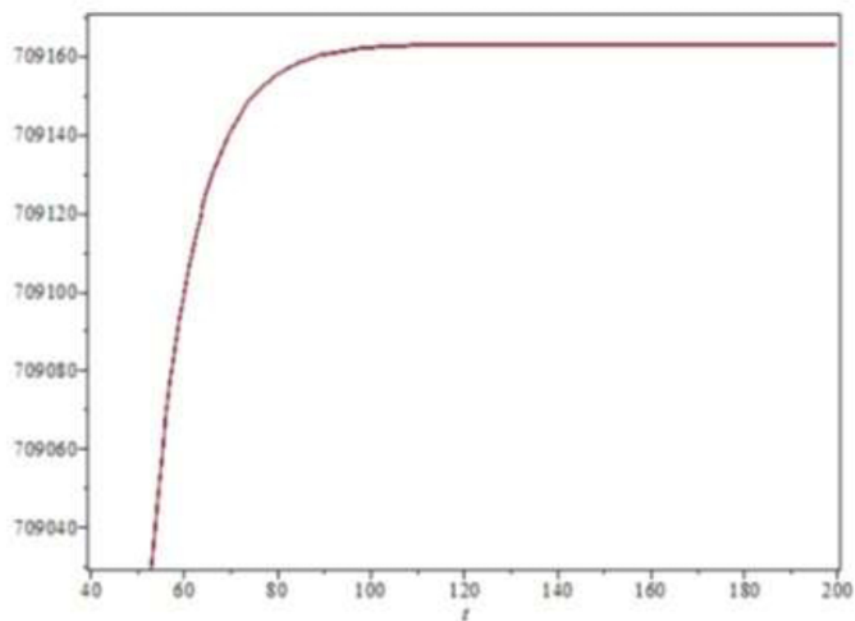
Proyeksi Penduduk di Kabupaten Trenggalek Dengan MAPLE

Berikut ini akan diberikan gambar proyeksi untuk jangka waktu yang akan datang penduduk di Kabupaten Trenggalek menggunakan model logistik dengan pengambilan $t=0..15$. Dari grafik pertumbuhan dapat dilihat bahwa jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek dari tahun ke tahun terus mengalami kenaikan.



Gambar 2. Grafik Pertumbuhan *Verhuls* $t=15t$

Berikutnya akan diberikan proyeksi pertumbuhan penduduk di Kabupaten Trenggalek dengan pengambilan waktu $t= 0..200$. Dari grafik dapat dilihat bahwa untuk jangka waktu yang akan datang penduduk di Kabupaten Trenggalek tidak akan melebihi kapasitas tampung (*carring capacity*) tetapi mendekati kapasitas tampungnya.



Gambar 3. Grafik Pertumbuhan Verhulst $t = 200$

$\text{>limit}(N1, t = \text{infinity}); \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 7.09165 \cdot 10^5$

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya maka dapat disimpulkan beberapa hal diantaranya: pertama, Besarnya nilai *carrying capacity* yang membatasi penduduk di Kabupaten Trenggalek adalah sebesar 709.165,53 jiwa. Kedua, Laju pertumbuhan intrinsik penduduk di kabupaten Trenggalek dengan menggunakan Model pertumbuhan logistik adalah sebesar $r = 0,10514$. Ketiga, Jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2025 dari hasil estimasi menggunakan model pertumbuhan logistik adalah sebesar 701.957 jiwa. Keempat, Proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek lebih tepat menggunakan model logistik I karena nilainya yang mendekati hasil sensus. Berdasarkan grafik menggunakan MAPLE maka jumlah penduduk di Kabupaten Trenggalek tidak akan melebihi nilai kapasitasnya pada jangka waktu yang akan datang akan tetapi mendekati nilai kapasitas tampung (K).

UCAPAN TERIMA KASIH

Riset penulis dibiayai oleh Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat , Direktorat Jenderal Penguatan Riset Pengembangan Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi sesuai dengan Kontrak Tahun anggaran 2018, dengan Nomor 120/SP2H/LT/DPRM/2018.

DAFTAR PUSTAKA

Buku Teks:

- Badan Pusat Statistik, 2013. Proyeksi Penduduk Indonesia (*Indonesian Population Projection*) 2010-2035, Jakarta.
- Brauer & Chavez, Castillo, 2001. *Mathematical Models In Population Biology and Epidemiology*, Springer
- Creswell, J. W. (2010). *Research design: pendekatan kualitatif, kuantitatif, dan mixed*. Yogyakarta: PT Pustaka Pelajar.

- Finizio, N. dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Bandung.
- J. Purcell, Edwin & Varberg, Dale, 1987, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2, edisi kelima. Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Miles, B. Mathew dan Michael Huberman. 1992. *Analisis Data Kualitatif Buku Sumber Tentang Metode-metode Baru*. Jakarta: UIP.
- Moleong, L. 2014. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Edisi Revisi. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Rahardi, Rustanto, dkk., 2003, *Persamaan Diferensial Biasa*, Jurusan Matematika, fakultas MIPA, Universitas Negeri Malang.
- Stewart, James, 2009, *Kalkulus*, Penerbit Salemba Teknik, Jakarta.
- Sugiyono. 2011. *Metode Penelitian Kualitatif, Kuantitatif, dan R&D*, Bandung: Alfabeta.
- Supama, dkk, 2003, *Kalkulus 1*, Fakultas Matematika dan ilmu pengetahuan alam, Universitas Gadjah Mada.
- Tarumingkeng, R.C, 1994, *Dinamika Populasi (Kajian Ekologi Kuantitatif)*, Pustaka Sinar Harapan, Jakarta.
- Jurnal**
- Ofori.T, Ephraim.L dan Nyarko.F. 2013. *Mathematical Model of Ghana's Population Growth*. International Journal of Modern Management Sciences.Vol, 2(2): 57-66
- Hathout,D. 2013. *Modeling Population Growth: Exponential and Hyperbolic Modeling*. *Applied Mathematics*. Vol. 4, 299-304